KAKO JE KEPLER ODREDIO STAZU MARSA

Priredila: Ivana Matić, prof.

Problem:

U ovoj vježbi ponovit ćemo u skraćenom i pojednostavljenom obliku slavno istraživanje kojim je Kepler odredio stazu Marsa i zakone njegova gibanja. Da bi uštedjeli vrijeme, umjesto trigonometrijskog rješavanja trokuta, problem ćemo riješiti geometrijskom konstrukcijom. Mada je Kepler radio s preciznošću od jedne lučne minute, mi ćemo biti zadovoljni s preciznošću od 1°. U crtanju moramo nastojati postići najbolju moguću preciznost.

Podaci:

Osnova za Keplera bile su Bracheove tablice, koje su sadržavale položaj Sunca među zvijezdama tijekom godine, što je opisivalo heliocentričnu longitudu Zemlje kao funkciju vremena, te mjerenja kuta γ = Sunce-Zemlja-Mars. Posebno važni su trenuci opozicije, kada je $\gamma = 180°$, jer u tim trenucima i jedino tada znamo izravno heliocentričnu longitudu Marsa. Heliocentrična longituda može na temelju toga biti nađena za bilo koji trenutak vremena interpolacijom. Na temelju Bracheovih mjerenja, Davidu Fabriciusu i Kepleru bile su precizno poznate opozicije u periodu od 24 godine. Za naše potrebe prikladno su odabrani dani u periodu od 1920. do 1939.godine, a mjerenja položaja prikazana su u tablici 1.

Pribor:

Za svakog učenika: arak papira dimenzija najmanje 18x18cm, dobar i prilično velik kutomjer, crtaći pribor (trokuti i ravnala) i kalkulator.

Postupak:

Odredimo najprije sinodički period Marsa, tj. interval između dvije uzastopne opozicije. Koristimo podatke iz drugog i zadnjeg stupca u tablici 1 (u vrijeme opozicije kut γ je $180°$). Rezultati koje smo dobili dani su u tablici 2. Uočavamo da ti intervali nisu jednaki. Razlog tome je eliptičnost planetskih staza i vremenska promjena elemenata planetskih staza. Iz dobivenih rezultata za sinodički period Marsa našli smo srednju vrijednost sinodičkog perioda Marsa S_S koja je također dana u tablici 2. Međutim, precizan rezultat biti će dobiven jedino ako se prva i zadnja opozicija našeg intervala javlja u gotovo istom djelu Marsove staze. Zbog toga moramo naći prikladnu kombinaciju intervala uspoređujući heliocentrične longitude Marsa λ_M (peti stupac iz tablice 1) ili još bolje uzmemo li srednju vrijednost između dvije prikladne kombinacije intervala i izračunamo li sinodički period (računamo u Julijanskim danima!). Rezultati su dani u tablici 3.

Tablica 1

POLOŽAJ MARSA					
dan	Julijanski dan	radijus- vektor Zemlje r_Z (a.j.)	heliocentrična longituda		kut $\gamma = SZM$ (°)
			Zemlje λ_z(°)	Marsa λ_M(°)	
21-4-1920	*2422436*	*1.005*	*211°*	*211°*	*180°*
9-3-1922	*2423123*	*0.993*	*168°*	*211°*	*98°*
10-6-1922	*2423216*	*1.017*	*259°*	*259°*	*180°*
25-1-1924	*2423810*	*0.985*	*124°*	*211°*	*60°*
23-8-1924	*2424021*	*1.011*	*330°*	*330°*	*180°*
11-7-1926	*2424708*	*1.016*	*288°*	*330°*	*91°*
4-11-1926	*2424824*	*0.992*	*41°*	*41°*	*180°*
28-5-1928	*2425395*	*1.014*	*247°*	*330°*	*59°*
21-9-1928	*2425511*	*1.005*	*358°*	*41°*	*93°*
21-12-1928	*2425602*	*0.984*	*89°*	*89°*	*180°*
9-8-1930	*2426198*	*1.014*	*316°*	*41°*	*58°*
27-1-1931	*2426369*	*0.985*	*127°*	*127°*	*180°*
13-12-1932	*2427055*	*0.984*	*84°*	*127°*	*101°*
2-3-1933	*2427133*	*0.991*	*161°*	*161°*	*180°*
31-10-1934	*2427742*	*0.992*	*38°*	*127°*	*59°*
6-4-1935	*2427899*	*0.978*	*196°*	*196°*	*180°*
19-5-1937	*2428673*	*1.012*	*238°*	*238°*	*180°*
23-7-1939	*2429468*	*1.016*	*300°*	*300°*	*180°*

Tablica 2

SINODIČKI PERIOD MARSA *S*	
interval između dvije uzastopne opozicije (u julijanskim danima)	sinodički period Marsa *S (u danima)*
2423216 - 2422436	780^d
2424021 - 2423216	805^d
2424824 - 2424021	803^d
2425602 - 2424824	778^d
2426369 - 2425602	767^d
2427133 - 2426369	764^d
2427899 - 2427133	766^d
2428673 - 2427899	774^d
2429468 - 2428673	795^d
srednja vrijednost sinodičkog perioda Marsa (u danima)	S_S = *(S S)/broj intervala = 7032/9=781.3333*^{d}

Tablica 3

KOMBINACIJE DVA INTERVALA U KOJIMA SE PRVA I ZADNJA OPOZICIJA JAVLJA U GOTOVO ISTOM DJELU MARSOVE STAZE I NJIHOVE SREDNJE VRIJEDNOSTI S_1 i S_2	
prva kombinacija dva intervala i njihova srednja vrijednost S_1 (u danima)	$2423216-2422436=780^d$ $2428673-2427899=774^d$ $S_1=(780+774)/2=777^d$
druga kombinacija dva intervala i njihova srednja vrijednost S_2 (u danima)	$2424021-2423216=805^d$ $2429468-2428673=795^d$ $S_2=(805+795)/2=800^d$
Srednja vrijednost *S'* između srednjih vrijednosti S_1 i S_2 *(u danima)*	$S' =(S_1+S_2)/2=(777+800)/2=1577/2=788.5^d$

Na osnovu dobivenih rezultata za srednju vrijednost sinodičkog perioda Marsa S_S=781,333 dana (tablica 2) i za srednju vrijednost *S*□=788,5 dana (tablica 3) između srednje vrijednosti prva dva intervala S_1 i srednje vrijednosti druga dva intervala S_2u kojima se opozicija javlja u gotovo istom dijelu Marsove staze, izračunali smo relativnu pogrešku uz poznatu srednju vrijednost sinodičkog perioda Marsa koja iznosi S_{sr}=779,98 dana. Relativnu pogrešku δ_{SS} i δ_{S} za S_s i *S*□ izraženu u postocima dobivamo na sljedeći način:

$$\delta_{S_S} = \frac{\Delta_{S_s}}{S_s} = \frac{|S_{sr} - S_s|}{S_s} = 0{,}17316\ \%$$

$$\delta_{S_S} = \frac{\Delta S'}{S'} = \frac{|S_{sr} - S'|}{S'} = 1{,}08053\ \%$$

Uočavamo da je manja relativna pogreška dobivena za vrijednost *Ss*. Nismo dobili, prema očekivanom, manju relativnu pogrešku za vrijednost S.

2. Iz rezultata dobivenih pod prvom točkom zadatka trebamo izračunati siderički period Marsa (trebao bi biti $687^d.0$). Korištenjem relacije koja povezuje *S*, *A* i *T* tj.:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{A} - \frac{1}{S}$$

izračunajmo srednji siderički period Marsa. Kako je *A*=365.2536^d srednji siderički period Zemlje, a S_s=781.3333^d i *S*=$788{,}5^d$ dobivene su vrijednosti sinodičkog perioda Marsa iz prve točke zadatka, dobivamo sljedeće:

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{A} - \frac{1}{S_s} = \frac{1}{365{,}2536} - \frac{1}{781{,}3333} = \frac{781{,}3333 - 365{,}2536}{285384{,}800625} = \frac{416{,}0797}{285384{,}800625} \Rightarrow$$

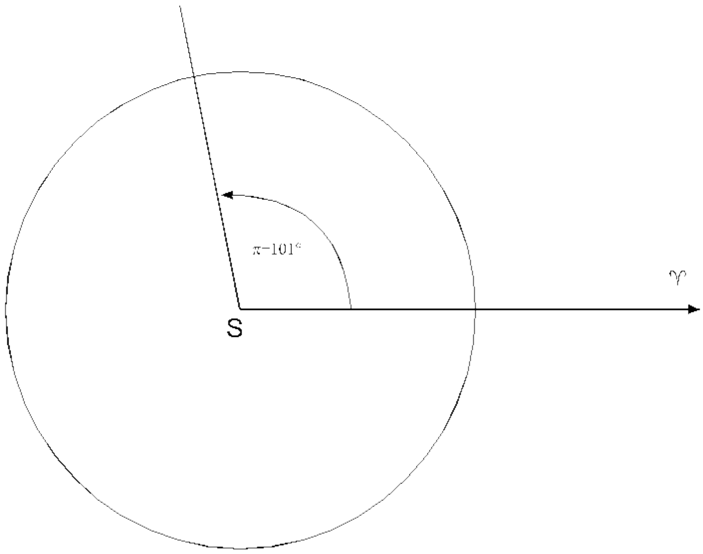
$$T_s = 685{,}8897^d$$

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{A} - \frac{1}{S'} = \frac{1}{365{,}2536} - \frac{1}{788{,}5} = \frac{788{,}5 - 365{,}2536}{288002{,}4636} = \frac{423{,}2464}{288002{,}4636} \Rightarrow$$

$$T' = 680{,}4605^d$$

Iz dobivenih rezultata uviđamo da smo bolji rezultat dobili u prvom slučaju gdje smo koristili srednju vrijednost sinodičkog perioda Marsa S_S i da razlika od prave vrijednosti iznosi ($-1{,}1103^d$), tj. da je relativna pogreška δ_{Ts}=0,16188 %. U drugom slučaju gdje koristimo srednju vrijednost srednjih vrijednosti od prve i druge kombinacije dvaju intervala u kojima se prva i zadnja opozicija javlja u gotovo istom dijelu Marsove staze odstupanje je ($-6{,}5395^d$), tj. relativna pogreška iznosi $\delta_{T□}$=0,96104 %.

3. Sljedeći korak zadatka je da na ravnoj površini papira nacrtamo kružnicu radijusa 5 cm (ona nam predstavlja Zemljinu stazu).



Slika 1. Zemljina staza (a=5cm; c=0,0835cm; p (duljina perihela)=101°)

Numerički ekscentricitet Zemljine staze iznosi e =0,0167 te iz njega dobivamo koliki je linearni ekscentricitet znajući relaciju $c = ea$ pa imamo:

c=0.0167 × 5 cm=0.0835 cm ≈ 1 mm

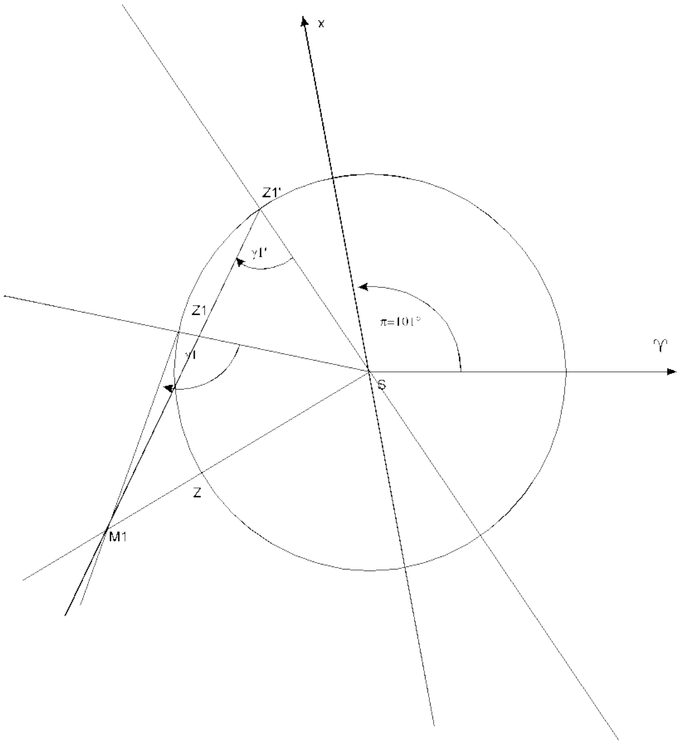
Pri tako malom ekscentricitetu, eliptična se putanja može vrlo dobro aproksimirati kružnicom čije je središte pomaknuto za c od položaja Sunca. Osim toga koristimo se podatkom da je duljina perihela π=101°. Nacrtamo li smjer prema proljetnoj točki kao horizontalnu zraku na desno, te ucrtamo li kut π, tada središte kružnice treba pomaknuti za 1 mm duž ucrtanog kraka kuta π (slika 1).

4. Sada nam je zadatak naći triangulacijsku točku Marsove staze. Uzmimo opoziciju iz 1920. godine (tablica 1) i nacrtajmo poziciju Zemlje (Z) i Marsa u tom trenutku (λ_Z=211°, λ_M=211°) (slika 2). Nakon toga nađimo položaj oba planeta, jednu Marsovu godinu kasnije: Mars je ponovo poprimio precizno isti položaj (pogledamo li u stupac longituda (tablica 1) vidimo da je to kriterij jer je λ_M=211°). Međutim, Zemlja je sada zauzela drugi položaj Z_1, koji pročitamo u tablici 1 (λ_Z=168°) i nacrtamo (slika 2).

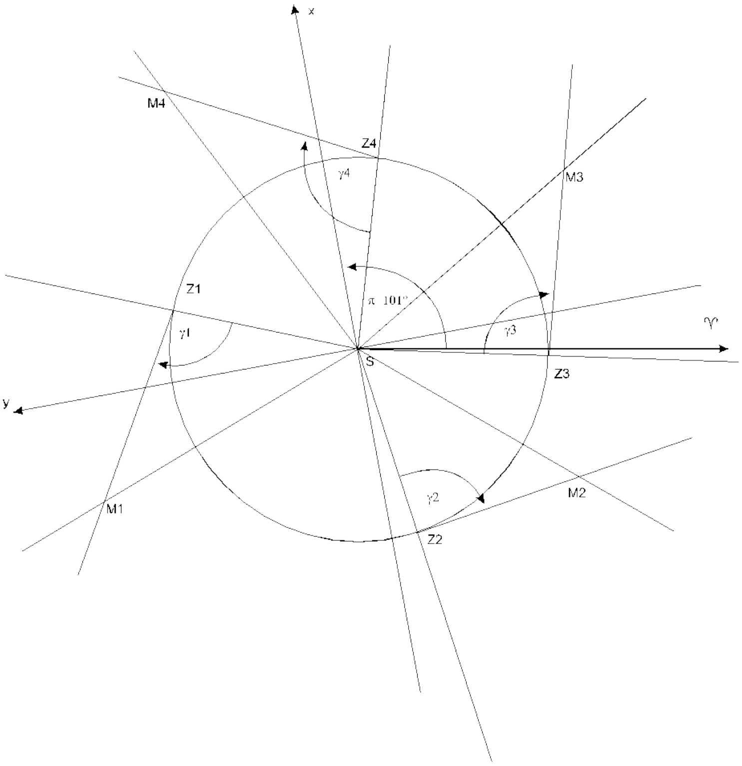
5. Kut Sunce-Zemlja-Mars bio je opažan (pročitamo ga iz tablice 1 (γ=98°)) pa ga nacrtamo na našoj slici 2 kao kut γ_1. Sada možemo nacrtati liniju Z_1M_1 od Zemlje prema Marsu koja siječe liniju SZ, te je tako nađen položaj Marsa u točki M_1.

6. Nakon dobivanja točke M_1,tj. položaja Marsa u točki M_1 ponovimo istu konstrukciju na jedan interval od dvije Marsove godine poslije opozicije iz 1920. godine, te očitavamo iz tablice 1 da je tada λ_Z=124°, λ_M=211° i γ=60° (na slici 2 to je kut γ_1'). Kada to nacrtamo dobit ćemo liniju $Z_1' M_1'$. Sada bi se prethodne dvije linije i ova treća $Z_1' M_1'$ trebale sjeći u istoj točki M_1, što i dobivamo (slika 2) (koristimo najbolju aproksimaciju).

7. Ponovimo opisani postupak, ali umjesto starta s opozicijom iz 1920. godine, uzmimo opoziciju iz 1924., 1926., i 1931. godine. Na taj način dobivamo još tri točke Marsove staze; M_2, M_3 i M_4 (slika 3).



Slika 2. Nalaženje položaja Marsa u točki M_1 na osnovu opažačkih vrijednosti heliocentrične longitude Zemlje (λ_Z) i Marsa (λ_M) u vrijeme opozicije (1920.g.), jednu Marsovu godinu kasnije(1922.g.) i dvije Marsove godine kasnije (1924.g.), te poznavanjem kuta γ =SZM. Sve vrijednosti dane su u tablici 1.



Slika 3. Četiri položaja Marsa u točkama M_1, M_2, M_3 i M_4 dobiveni korištenjem mjerenih vrijednosti heliocentrične longitude Zemlje (λ_Z) i Marsa(λ_M) u vrijeme opozicije (1920., 1924., 1926. i 1931.godine), te jednu Marsovu godinu kasnije (1922., 1926., 1928. i 1932.godine) kao i kuta γ =SZM (tablica 1). x-os koordinatnog sustava prolazi točkom S (Sunce) i točkom Zemljinog perihela. y-os ⊥ x-os kroz točku S.

8. Da bi našli stazu Marsa koja prolazi kroz naše četiri dobivene točke moramo se prisjetiti polarne jednadžbe elipse. Znajući polarni oblik jednadžbe elipse, iskoristit ćemo ga za nalaženje staze Marsa poznavajući četiri točke koje smo našli pod točkama 4., 5., 6. i 7. zadatka (slika 3). U tu svrhu definiramo koordinatni sustav čija *x*-os prolazi točkom koja predstavlja Sunce i točkom koja predstavlja Zemljin perihel, a *y*-os je okomita na *x*-os i prolazi točkom koja predstavlja Sunce na slici 3. U tom kooordinatnom sustavu (sa slike 3) očitamo položaje četiri točke Marsove staze; izmjerimo njihove radijus-vektore *r* i kut *f*. Rezultati su dani u tablici 4.

Tablica 4

RADIJUS-VEKTOR TOČKE MARSOVE STAZE *r I KUT f DOBIVENI MJERENJEM SA SLIKE 3*				
Točka Marsove staze	*x-koordinata Marsove staze* *x* (cm)	*y-koordinata Marsove staze* *y* (cm)	radijus-vektor točke Marsove staze *r* (cm)	kut *f* (°)
M_1	*-2,75*	*7,4*	*7,85*	*111*
M_2	*-4,5*	*-5,1*	*6,85*	*228,5*
M_3	*3,6*	*-6,3*	*7,25*	*300*
M_4	*7,5*	*3,65*	*8,36*	*26*

Da bi dobili rezultat tj. veliku poluos a, malu poluos b, numerički ekscentricitet e, linearni ekscentricitet c, poluparametar p i kut α (kut između *x*-osi sa slike 3 i pravca na kojem leži velika poluos Marsove staze) dovoljni su nam podaci za tri točke.

Najprije smo općenito riješili zadatak za bilo koje tri točke Marsove staze.

Neka su M_1, M_2 i M_3 bilo koje tri točke Marsove staze te neka za svaku od njih znamo radijus-vektore r_1, r_2, r_3 i kutove f_1, f_2 i f_3. Tada uvrstimo te podatke u polarnu jednadžbu elipse sljedećeg oblika:

$$r = \frac{p}{1-ecos\ (f-\alpha)} \qquad \text{za } e<1$$

gdje je α kut između *x*-osi sa slike 3 i pravca na kojem leži velika poluos Marsove staze pa dobivamo sljedeće tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$r_1 = \frac{p}{1-ecos\ (f_1-\alpha)};\ r_2 = \frac{p}{1-ecos\ (f_2-\alpha)};\ \ r_3 = \frac{p}{1-ecos\ (f_3-\alpha)};$$

Omjer prve dvije jednadžbe daje:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{p}{1-ecos\ (f_2-\ \alpha)}$$

Iz toga sada možemo izraziti numerički ekscentricitet e kao:

$$e = \frac{1-\frac{r_2}{r_1}}{\cos(f_1-\alpha)-\frac{r_2}{r_1}\cos(f_2-\alpha)}$$

Omjer prve i treće jednadžbe daje:

$$r_3(1\text{-}e\cos(f_3\text{-}\alpha))=r_1(1\text{-}e\cos(f_1\text{-}\alpha))$$

Eliminiranjem numeričkog ekscentriciteta nalazimo:

$$\frac{r_3}{r_1}=\frac{-\frac{r_2}{r_1}\cos(f_2-\alpha)+\frac{r_2}{r_1}\cos(f_1-\alpha)}{\cos(f_1-\alpha)-\frac{r_2}{r_1}\cos(f_2-\alpha)-\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)\cos(f_3-\alpha)}$$

Sređivanjem ovog izraza dobivamo:

$$\tan\alpha=\frac{\left[(r_3-r_2)\cos f_1+\left(r_2-\frac{r_2r_3}{r_1}\right)\cos f_2+\left(\frac{r_2r_3}{r_1}-r_3\right)\cos f_3\right]}{\left[(r_2-r_3)\sin f_1+\left(\frac{r_2r_3}{r_1}-r_2\right)\sin f_2+\left(r_3-\frac{r_2r_3}{r_1}\right)\sin f_3\right]}$$

Iz toga ćemo lako dobiti kut α:

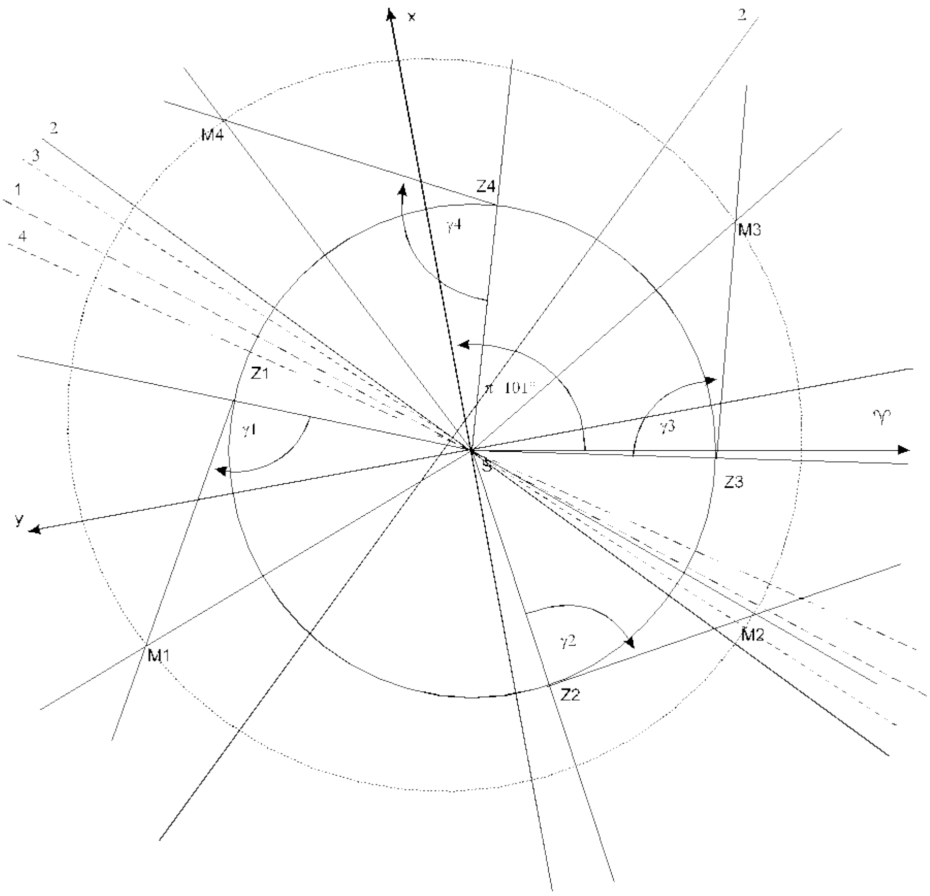
$$\alpha=\arctan\frac{\left[(r_3-r_2)\cos f_1+\left(r_2-\frac{r_2r_3}{r_1}\right)\cos f_2+\left(\frac{r_2r_3}{r_1}-r_3\right)\cos f_3\right]}{\left[(r_2-r_3)\sin f_1+\left(\frac{r_2r_3}{r_1}-r_2\right)\sin f_2+\left(r_3-\frac{r_2r_3}{r_1}\right)\sin f_3\right]}$$

Sada iz ovih prethodnih izraza (koje smo dobili za tri različite točke tj. položaje Marsa) za naše vrijednosti *r* i *f* iz zadatka koje se nalaze u tablici 4 dobili smo sljedeće rezultate (tablica 5) za kut α, numerički ekscentricitet *e*, poluparametar *p*, veliku poluos *a*, malu poluos *b* te linearni ekscentricitet *c* Marsove staze. U tablici 5 dani su rezultati za četiri različite trojke točaka od četiri točke koje smo dobili na slici 3 kao položaje Marsa, te srednje vrijednosti dobivenih rezultata.

Tablica 5

ELEMENTI MARSOVE STAZE DOBIVENI IZ IZMJERENIH VRIJEDNOSTI ZA KUT *f* I RADIJUS-VEKTOR *r* SA SLIKE 3 TE PRIMJENOM POLARNE JEDNADŽBE ELIPSE						
trojke točaka	kut α (°)	numerički *ekscentricitet e*	poluparametar *p* (cm)	velika poluos *a* (cm)	mala poluos *b* (cm)	linearni ekscentricitet *c* (cm)
M_1, M_2, M_3	*50,63207*	*0,09323*	*7,48816*	*7,55381*	*7,52092*	*0,70115*
M_1, M_2, M_4	*43,31995*	*0,10201*	*7,54589*	*7,62524*	*7,58546*	*0,77377*
M_1, M_3, M_4	*46,05154*	*0,11260*	*7,47572*	*7,57172*	*7,52357*	*0,84715*
M_2, M_3, M_4	*55,02053*	*0,10697*	*7,57801*	*7,66572*	*7,62174*	*0,81530*
SREDNJE VRIJEDNOSTI α KUTA α; *e* NUMERIČKOG EKSCENTRICITETA *e*; *p POLUPARAMETRA p; a VELIKE POLUOSI a; b MALE POLUOSI b; TE c LINEARNOG EKSCENTRICITETA c GDJE SU:* $\alpha=(\Sigma\alpha)/4$; $e=(\Sigma e)/4$; $p=(\Sigma p)/4$; $a=(\Sigma a)/4$; $b=(\Sigma b)/4$; $c=(\Sigma c)/4$						
α/°		*e*	*p/cm*	*a/cm*	*b/cm*	*c/cm*
48,75602		*0,10370*	*7,52195*	*7,60412*	*7,56292*	*0,78434*

Prema dobivenim vrijednostima možemo nacrtati stazu Marsa (slika 4). Dobit ćemo četiri različite staze s obzirom na četiri različite trojke točaka koje smo uzimali.



Slika 4. Zemljina staza predstavljena je punom linijom, a putanja Marsa koja prolazi točkama M_1, M_3, M_4 iscrtkanom linijom.

1. pravac na kojem leži velika poluos Marsove staze određene točkama M_1, M_3, M_4.
2. pravac na kojem leži velika poluos Marsove staze određena točkama M_1, M_3, M_4.
3. pravac na kojem leži velika poluos Marsove staze određena točkama M_1, M_3, M_4.
4. pravac na kojem leži velika poluos Marsove staze određena točkama M_1, M_3, M_4.

Keplerovi prethodnici učinili su određene *a priori* pretpostavke o kinematici kretanja planeta. Keplerovom metodom kojom smo se koristili ovdje, staza je dobivena samo opažanjem i čistim geometrijskim razmatranjima.

9. U ovom dijelu zadatka ćemo iz naše slike 4 izmjeriti grubu vrijednost za π, longitudu perihela i usporediti to s vrijednostima iz literature. Na slici 4 uočavamo da je Marsov perihel u IV kvadrantu našeg koordinatnog sustava, pa longitudu perihela p mjerimo kao kut od proljetne točke do desnog dijela pravca 1, 2, 3 i 4 (desno od točke S-Sunce). Pomoću kutomjera izmjerili smo longitudu perihela π Marsove staze. Rezultati se nalaze u tablici 6.

Tablica 6

LONGITUDA PERIHELA MARSOVE STAZE π IZMJERENA SA SLIKE 4	
Trojke točaka pomoću kojih smo dobili stazu Marsa	Longituda perihela π (°)
M_1,M_2,M_3	*332*
M_1,M_2,M_4	*323*
M_1,M_3,M_4	*327*
M_2,M_3,M_4	*337*
srednja vrijednost longitude perihela π (°)	$\pi=(\sum\pi)/4=(332+323+327+337)/4=329{,}75$

Srednja vrijednost longitude perihela Marsa koju smo očitali iz astronomskog godišnjaka za 1989. godinu iznosi 335,87°. Naše vrijednosti iz tablice 6 odstupaju od te vrijednosti u intervalu od (-11,87°) do (+0,13°) tj. relativne pogreške iznose: $\delta_{\pi123}$=1,16566%; $\delta_{\pi124}$=3,98452%; $\delta_{\pi134}$=2,71254%; $\delta_{\pi234}$=0,33531% $\delta_{\pi\square}$=1,85595%. Uočimo da manja odstupanja dobivamo kod staza 1 i 4 dobivenih iz uzastopnih položaja Marsa u tablici 1.

10. Ovdje moramo iz dobivenog a (tablica 5) izvesti period revolucije Marsa i usporediti ga s našim prvim rezultatom (točka 2). U tu svrhu koristimo se trećim Keplerovim zakonom (kvadrati sideričkih ophodnih vremena (T) planeta odnose se kao kubovi njihovih srednjih udaljenosti (a) od Sunca), te koristimo vrijednosti srednjeg sideričkog perioda Zemlje T_Z =365.2536^d i velike poluosi Zemljine staze dane pod točkom 3 a_Z=5cm. Iz trećeg Keplerovog zakona imamo:

$$\left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2 = \left(\frac{a_M}{a_Z}\right)^3 \Rightarrow T_M = \sqrt{\left(\frac{a_M}{a_Z}\right)^2} \cdot T_Z$$

Uvrstivši naše podatke za a dobivamo rezultate koji se nalaze u tablici 7.

Tablica 7

SIDERIČKI PERIOD MARSA		
a** $_M$/**cm	***a** $_M$/**a** $_Z$*	***T** $_M$/**dana***
7,55381	1,510762	678,2414
7,62524	1,525048	687,8845
7,57172	1,514344	680,6550
7,66572	1,533144	693,3694
Srednja vrijednost T_M (u danima)		685,0376

Prisjetimo se da smo pod točkom 2 za siderički period Marsa dobili sljedeće vrijednosti: T_S=685,8897^d i T=680,4605^d koje su dobivene iz izraza koji povezuje sinodički i siderički period za vanjske planete, a gdje su korištene srednje vrijednosti sinodičkog perioda Marsa. Uočavamo da nam je srednja vrijednost, dobivena pod točkom 2 T_S=685,8897^d, približno jednaka srednjoj vrijednosti T_M=685,0376 koju smo dobili iz vrijednosti za siderički period Marsa danih u tablici 7. Stvarna vrijednost sideričkog perioda Marsa je 687^d, pa uviđamo da se kod nas javljaju mala odstupanja (-1,1103^d) za T_S; (1,9624^d) za T_M i (-6,5395^d) za T, tj. relativne pogreške iznose δ_{Ts}=0,16188 %; δ_{TM}=0,28647 % i δ_T=0,96104%.

11. Između dvije uzastopne opozicije planet se pomaknuo za *360°* + Δω što odgovara vremenskom intervalu jedne Marsove godine + Δt. U ovom dijelu zadatka moramo izračunati kutnu brzinu (Δω / Δt) duž staze, pa ju prikazati kao funkciju heliocentrične longitude, te uočiti gdje je maksimum, a gdje

minimum od ($\Delta\omega$ / Δt). Da bi riješili ovaj dio zadatka koristimo se vrijednostima heliocentrične longitude Marsa u vrijeme opozicije iz tablice 1 (slika 5).

Uočimo da je:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\Delta\lambda_M}{\Delta t} & \text{za } \lambda_{M\text{k}} > \lambda_{M\text{p}} \\ \dfrac{360° + \Delta\lambda_M}{\Delta t} & \text{za } \lambda_{M\text{k}} < \lambda_{M\text{p}} \end{array} \right\} \quad ; \text{ gdje je } \Delta\lambda_M = \lambda_{M\text{k}} - \lambda_{M\text{p}}$$

tj. razlika između konačne heliocentrične longitude Marsa i početne heliocentrične longitude Marsa u intervalu između dvije uzastopne opozicije. Vrijednosti heliocentrične longitude Marsa u vrijeme opozicije opet navodimo zajedno s vrijednostima koje smo dobili za $\Delta\omega$ i za vremenski interval između dvije uzastopne opozicije u tablici 8. U tablici 9 dane su nam vrijednosti vremenskog intervala Δt (u danima i sekundama) koji smo dobili tako da smo od dobivenog intervala vremena između dvije uzastopne opozicije oduzeli vremenski interval jedne Marsove godine koji iznosi 687 dana.

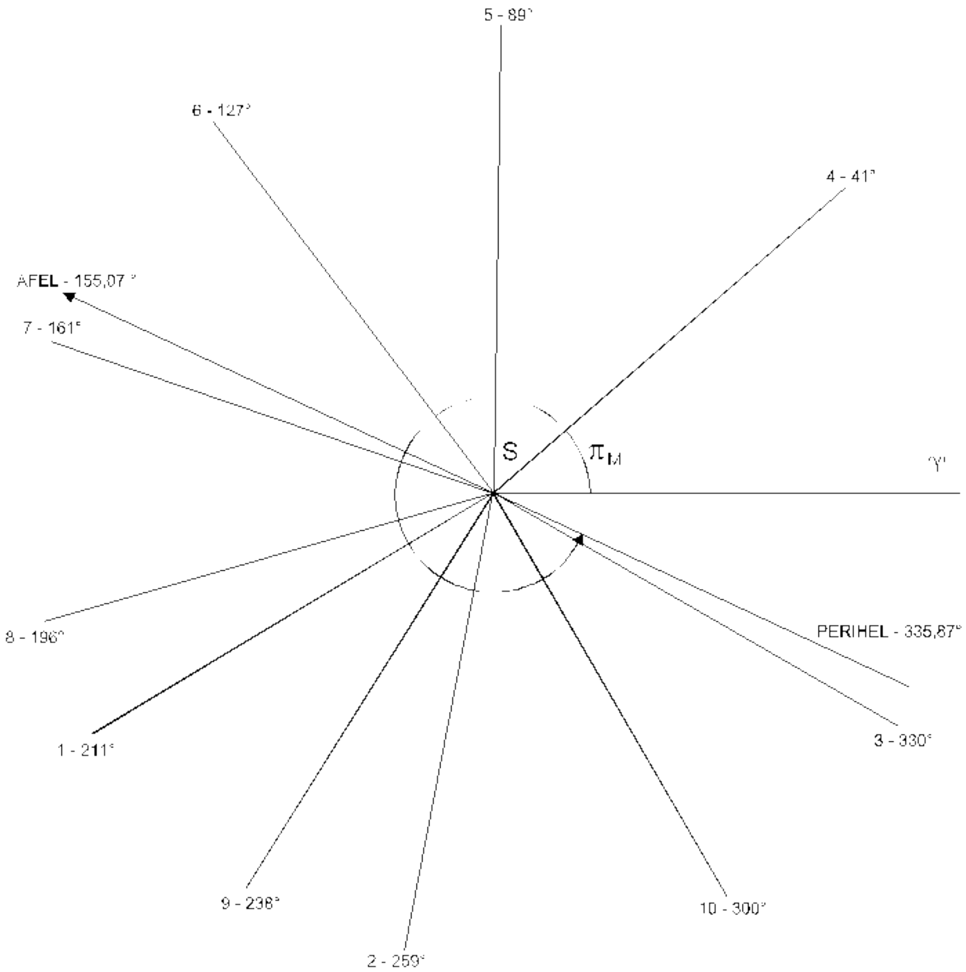
Dobivši vrijednost kutne brzine za pojedine intervale (tablica 9), želimo pokazati na kojem djelu staze je ona minimalna, a na kojem maksimalna. Zbog toga, prikazat ćemo ovisnost kutne brzine o kutu f. Pokazat ćemo da za naše vrijednosti vrijedi da je u blizini perihela (f_p 180°) kutna brzina maksimalna i obrnuto, u blizini afela (f_a 0°) kutna brzina minimalna. Zbog toga, najprije izračunamo vrijednosti $\lambda=(\lambda_{Mp}+\lambda_{Mk})/2$ za naše intervale (koristimo vrijednosti iz tablice 8) koje su dane u tablici 10 zajedno s vrijednostima kuta f koji je očito jednak (slika 5) $f=\lambda+(\pi_M -180°)$, gdje je π_M srednja vrijednost longitude perihela Marsa za 1989. godinu koja iznosi π_M=335,87°.

Tablica 8

PROMJENA HELIOCENTRIČNE LONGITUDE ($\Delta\omega$)					
redni broj intervala između dvije uzastopne opozicije	Početna heliocentrična longituda intervala λ_{Mp} (°)	konačna heliocentrična longituda intervala λ_{Mk} (°)	$\Delta\omega = \Delta\lambda_M$ za $\lambda_{Mk} > \lambda_{Mp}$ ili $360° + \Delta\lambda_M$ za $\lambda_{Mk} < \lambda_{Mp}$		vremenski interval između dvije uzastopne opozicije (u danima)
			$\Delta\omega$ (°)	$\Delta\omega$ (rad)	
1.	*211*	*259*	*48*	*0,83776*	*780*
2.	*259*	*330*	*71*	*1,23918*	*805*
3.	*330*	*41*	*71*	*1,23918*	*803*
4.	*41*	*89*	*48*	*0,83776*	*778*
5.	*89*	*127*	*38*	*0,66323*	*767*
6.	*127*	*161*	*34*	*0,59341*	*764*
7.	*161*	*196*	*35*	*0,61087*	*766*
8.	*196*	*238*	*42*	*0,73303*	*774*
9.	*238*	*300*	*62*	*1,08210*	*795*

Tablica 9

KUTNA BRZINA ($\Delta\omega/\Delta t$)		
Vremenski interval Δt *(u danima)*	vremenski interval Δt (s)	kutna brzina ($\Delta\omega/\Delta t$) $\cdot 10^{-7}$rad s^{-1}
93	*8035200*	*1,04261*
118	*10195200*	*1,21546*
116	*10022400*	*1,23641*
91	*7862400*	*1,06552*
80	*6912000*	*0,95953*
77	*6652800*	*0,89197*
79	*6825600*	*0,89496*
87	*7516800*	*0,97520*
108	*9331200*	*1,15966*

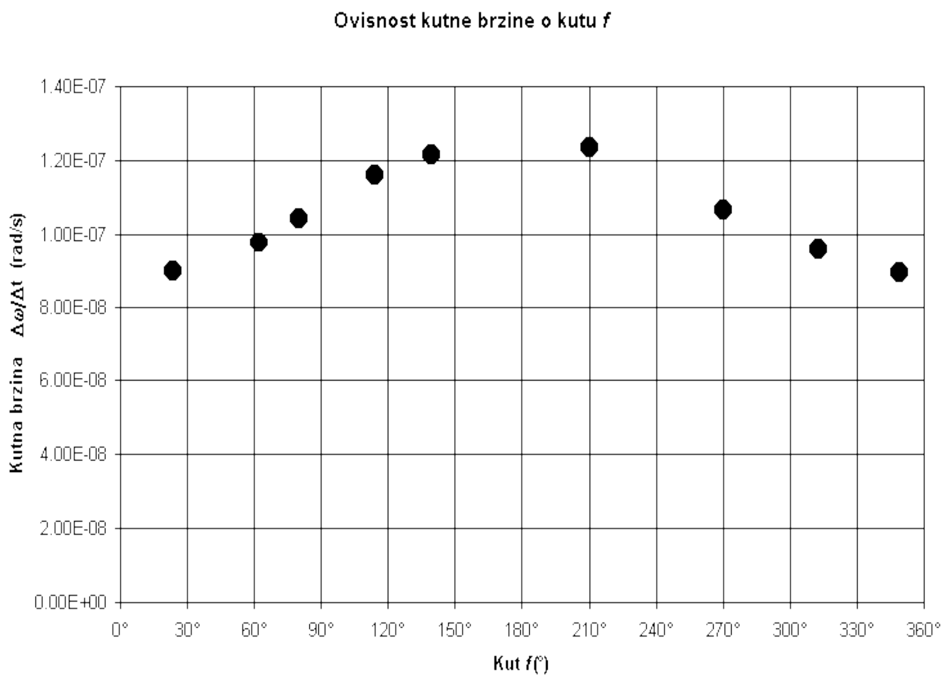


Slika 5 Uz dijagram ovisnosti kutne brzine $\Delta\omega/\Delta t$ o kutu f. Vrijednosti heliocentrične longitude Marsa u vrijeme opozicije naznačene su redom brojevima i pripadnim vrijednostima. Kut f, tj. kut koji koristimo kod prikaza elipse kojoj je ishodište polarnog sustava u lijevom žarištu dan je sljedećim izrazom $f = \lambda + (\pi_M - 180°)$.

Tablica 10

SREDNJA VRIJEDNOST HELIOCENTRIČNE LONGITUDE INTERVALA λ I KUT *f*		
redni broj intervala	srednja vrijednost heliocentrične longitude intervala λ (°)	kut *f* (°)
1.	*235*	*79,13*
2.	*294,5*	*138,63*
3.	*5,5*	*209,63*
4.	*65*	*269,13*
5.	*108*	*312,13*
6.	*144*	*348,13*
7.	*178,5*	*22,63*
8.	*217*	*61,13*
9.	*269*	*113,13*

Slijedi dijagram ovisnosti kutne brzine ($\Delta\omega/\Delta t$) o kutu *f*:

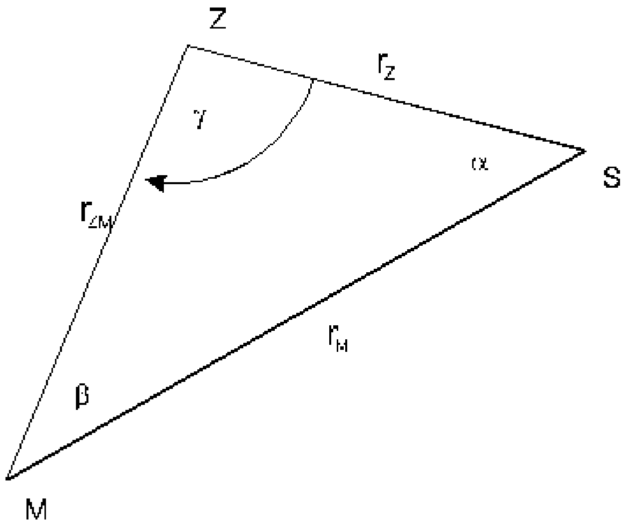


Iz tablica 9 i 10, te na pridruženom dijagramu uočavamo da je zaista u blizini Marsova perihela (f_p 180°) f=209,63° kutna brzina maksimalna, a u blizini Marsova afela (f_a 360°) f=348.13° minimalna.

12. Umjesto konstrukcije trokuta *SZM* skiciranjem, možemo proračunati njegovo trigonometrijsko rješenje. Učinit ćemo to za nekoliko opozicija i usporediti s ranijim rezultatima.

Uzmemo li opoziciju iz 1920. godine, tada iz tablice 1 očitamo da je heliocentrična longituda Marsa λ_M = 211°. Mars 1922. godine ima istu heliocentričnu longitudu, dok Zemljina heliocentrična longituda iznosi λ_Z =168°. Oduzmemo li te dvije heliocentrične longitude (tj.λ_M-λ_Z) dobit ćemo jedan kut našeg trokuta koji ćemo označiti s α, te u našem slučaju iznosi 43°. Drugi kut u našem trokutu je kut γ(Sunce-Zemlja-Mars) koji očitamo iz tablice 1, te u našem slučaju iznosi 98°. Treći kut u trokutu dobijemo tako što znamo da je zbroj kuteva u trokutu jednak 180°. Njega označimo s β, a iznosi (180° -43° -98°)=39°. Osim kuteva, znamo jednu stranicu našeg trokuta (r_Z), a to je stranica na kojoj leže kutovi α i γ, te predstavlja radijus vektor Zemljine staze za koji smo već ranije pretpostavili da iznosi 5 *cm* na našoj slici 3. Znači imamo sljedeće:

$\alpha = 43°$; $\beta = 39°$; $\gamma = 98°$ te $r_Z = 5$ *cm* (slika 6).



Slika 6. Trokut SZM gdje je $\alpha = (\lambda_M - \lambda_Z) = (211° - 168°) = 43°$; $\beta = 39°$; $\gamma = 98°$, te r_Z=5cm.

Iz ovih vrijednosti, pomoću sinusovog poučka dobit ćemo ostale dvije stranice u trokutu *SZM*. Za ovaj naš trokut sinusov poučak glasi:

$$\frac{r_{ZM}}{\sin\alpha} = \frac{r_M}{\sin\gamma} = \frac{r_Z}{\sin\beta}$$

Iz tog poučka dobivamo da su:

$$r_M = \frac{r_Z}{\sin\beta} \cdot \sin\gamma \;\; \text{i} \;\; r_{ZM} = \frac{r_Z}{\sin\beta} \cdot \sin\alpha$$

Vrijednosti koje dobivamo su:

r_M =7,86776 cm
r_{ZM} =5,41853 cm

Na gore opisan način, a koristeći opozicije iz 1924.,1926. i 1931.godine dobili smo sljedeće vrijednosti za r_M i r_{ZM}dane zajedno s prethodnim vrijednostima za 1920. godinu u tablici 11.

Tablica 11

ELEMENTI TROKUTA *SZM*				
	1920.g	*1924.g.*	*1926.g*	*1931.g.*
α (°)	*43*	*42*	*43*	*43*
β (°)	*39*	*47*	*43,5*	*36*
γ (°)	*98*	*91*	*93,5*	*101*
r_Z (cm)	*5*	*5*	*5*	*5*
r_M (cm)	*7,86776*	*6,83560*	*7,25015*	*8,35022*
r_{ZM} (cm)	*5,41853*	*4,57460*	*4,95383*	*5,80142*

Sada još moramo izračunati kut *f* za svaku godinu. To je kut koji zatvara radijus-vektor Marsove staze s pozitivnim smjerom osi *x* (velika os Zemljine staze određena longitudom perihela p =101°). Tako za 1920. godinu dobivamo *f* iz razlike Marsove heliocentrične longitude za tu godinu i longitude perihela Zemljine staze. Analogno dobivamo *f* za ostale godine, ali moramo paziti kod prijelaza punog kuta. Dobivamo vrijednosti koje su dane u tablici 12.

Tablica 12

RADIJUS - VEKTOR TOČKE MARSOVE STAZE *r* I KUT *f* DOBIVENI TRIGONOMETRIJSKIM RJEŠAVANJEM TROKUTA *SZM*		
točka Marsove staze	radijus-vektor točke Marsove staze *r* (cm)	kut *f* (°)
M_1	*7,86776*	*110*
M_2	*6,83560*	*229*
M_3	*7,25015*	*300*
M_4	*8,35022*	*26*

Sada ćemo na osnovu vrijednosti iz tablice 12 dobivenih traženjem trigonometrijskog rješenja trokuta *SZM* izračunati elemente Marsove staze i njihove srednje vrijednosti na analogan način kao pod točkom 8, a koji su dani u tablici 13. Vrijednosti longitude perihela Marsa dobivamo zbrajanjem longitude perihela Zemlje koja nam je dana u zadatku i iznosi $\pi = 101°$ s kutom od $180°$ i kutom α čija je vrijednost dana u tablici 13. One su dane u tablici 14.

Tablica 13

ELEMENTI MARSOVE STAZE DOBIVENI TRIGONOMERIJSKIM RJEŠAVANJEM TROKUTA *SZM* I KORIŠTENJEM POLARNE JEDNADŽBE ELIPSE						
trojke točaka	Kut α (°)	numerički ekscentricitet e	Poluparametar p (cm)	velika poluos a (cm)	mala poluos b (cm)	linearni ekscentricitet c (cm)
M_1, M_2, M_3	*50,17804*	*0,09567*	*7,48940*	*7,55857*	*7,52391*	*0,71978*
M_1, M_2, M_4	*44,26762*	*0,10274*	*7,53552*	*7,61592*	*7,57561*	*0,77835*
M_1, M_3, M_4	*46,39010*	*0,11142*	*7,47810*	*7,57211*	*7,52496*	*0,83846*
M_2, M_3, M_4	*53,79870*	*0,10668*	*7,56225*	*7,64929*	*7,60565*	*0,81135*

SREDNJE VRIJEDNOSTI α KUTA α; e NUMERIČKOG EKSCENTRICITETA e; p POLUPARAMETRA p; a VELIKE POLUOSI a; b MALE POLUOSI b; TE c LINEARNOG EKSCENTRICITETA c GDJE SU: $\alpha=(\Sigma\alpha)/4$; $e=(\Sigma e)/4$; $p=(\Sigma p)/4$; $a=(\Sigma a)/4$; $b=(\Sigma b)/4$; $c=(\Sigma c)/4$					
α (°)	e	p (cm)	a (cm)	b (cm)	c (cm)
48,65862	*0,10413*	*7,51632*	*7,59897*	*7,55753*	*0,78699*

Tablica 14

LONGITUDA PERIHELA p	
Trojke točaka	longituda perihela p (°)
M_1,M_2,M_3	*331,17763*
M_1,M_2,M_4	*325,26783*
M_1,M_3,M_4	*327,39010*
M_2,M_3,M_4	*334,79798*
srednja vrijednost longitude perihela π (°)	$\pi=(?\pi)/4=329,65839$

Usporedimo sada rezultate dobivene mjerenjem sa slika 3 i 4, te korištenjem polarne jednadžbe elipse (tablica 4, 5 i 6) s rezultatima dobivenim trigonometrijskim rješavanjem trokuta *SZM* i korištenjem polarne jednadžbe elipse (tablica 12, 13 i 14). Uzmemo li da su vrijednosti dobivene trigonometrijskim riješavanjem trokuta *SZM* točne, možemo izračunati relativne pogreške radijus-vektora r i kuta f koje su dane u tablici 15. Osim njih računamo relativne pogreške kuta α, numeričkog ekscentriciteta e, poluparametra p, velike poluosi a, male poluosi b, linearnog ekscentriciteta c, longitude perihela π, te njihovih srednjih vrijednosti α, e, p, a, b i c koje su dane u tablici 16.

Relativnu pogrešku računamo na sljedeći način:

$$\delta_m = \frac{|t-m|}{m} \cdot 100\%$$

gdje je *m* vrijednost dobivena mjerenjem sa slika 3 i 4, te korištenjem polarne jednadžbe elipse, a *t* vrijednost dobivena trigonometrijskim rješavanjem trokuta *SZM* i korištenjem polarne jednadžbe elipse.

Tablica 15

RELATIVNA POGREŠKA δ_r RADIJUS-VEKTORA MARSOVE STAZE *r* I RELATIVNA POGREŠKA δ_f KUTA *f*			
δ_{rM1} (%)	*0,22624*	δ_{f1} (%)	*0,90090*
δ_{rM2} (%)	*0,21022*	δ_{f2} (%)	*0,21882*
δ_{rM3} (%)	*0,00207*	δ_{f3} (%)	*0,00000*
δ_{rM4} (%)	*0,11699*	δ_{f4} (%)	*0,00000*

Tablica 16

RELATIVNE POGREŠKE KUTA α, δ_α; NUMERIČKOG EKSCENTRICITETA *e*, δ_e; POLUPARAMETRA *p*, δ_p; VELIKE POLUOSI *a*, δ_a; MALE POLUOSI *b*, δ_b; LINEARNOG EKSCENTRICITETA *c*, δ_c; LONGITUDE PERIHELA π, δ_π							
trojke točaka Marsove staze	δ_α (%)	δ_ε (%)	δ_π (%)	δ_α (%)	δ_β (%)	δ_χ (%)	δ_π (%)
M_1, M_2, M_3	*0,89672*	*2,61718*	*0,01656*	*0,06301*	*0,03976*	*2,65706*	*0,24758*
M_1, M_2, M_4	*2,18761*	*0,71562*	*0,13743*	*0,12223*	*0,12985*	*0,59191*	*0,70205*
M_1, M_3, M_4	*0,73518*	*1,04796*	*0,03184*	*0,00515*	*0,01848*	*1,02579*	*0,11930*
M_2, M_3, M_4	*2,22068*	*0,27110*	*0,20797*	*0,21433*	*0,21111*	*0,48448*	*0,65320*
RELATIVNE POGREŠKE SREDNJE VRIJEDNOSTI KUTA α, δ_α; NUMERIČKOG EKSCENTRICITETA *e*, δ_e; POLUPARAMETRA *p*, δ_p; VELIKE POLUOSI *a*, δ_a; MALE POLUOSI *b*, δ_b; LINEARNOG EKSCENTRICITETA *c*, δ_c; TE LONGITUDE PERIHELA π, δ_π							
δ_α(%)		δ_ε(%)	δ_π(%)	δ_α(%)	δ_β(%)	δ_χ(%)	δ_π(%)
0,19977		*0,41466*	*0,07485*	*0,06773*	*0,07127*	*0,33786*	*0,02778*