POLOŽAJI PLANETA U NJIHOVOJ STAZI

Priredila: Ivana Matić, prof.

Problem

Nacrtati približnu stazu i odrediti trenutni položaj planeta Marsa.

Staze planeta su elipse, koje mogu biti aproksimirane kružnicama, čiji je centar smješten na maloj udaljenosti od Sunca. S obzirom da je nagnutost ekliptike mala, možemo ih nacrtati u ravnini ekliptike. U ovom slučaju koristit ćemo se elementima planeta iz astronomskog godišnjaka za 1989. godinu.

Pribor

Za svakog učenika potreban je milimetarski papir (ili papir s ucrtanim pravokutnim koordinatnim sustavom), tablica s elementima planeta, crtaći pribor (trokuti, ravnala, kutomjer i šestar) i kalkulator.

Uputa

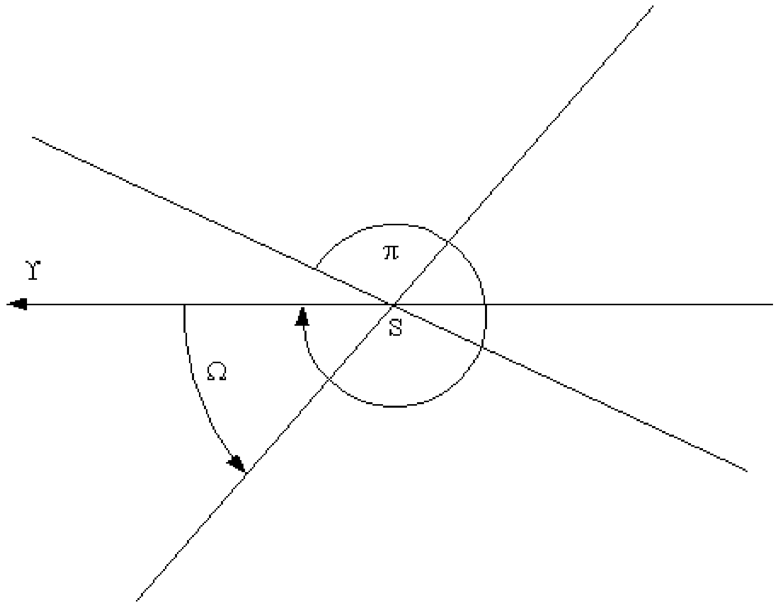
Grafikon položaja planeta tekuće godine možemo naći u astronomskom godišnjaku.

Postupak

1. Kao primjer uzmimo planet Mars. Sunce označimo točkom u centru naše površine papira. Zatim od njega nacrtamo horizontalnu liniju prema proljetnoj točki. To je pravac Sunce - proljetna točka (Sˇ) koji je proizvoljan. Nakon toga, iz tablice elemenata pročitamo longitudu W uzlaznog čvora Marsa koja za 15. ožujka 1989. godine iznosi W =49,477° i nacrtamo liniju čvora (slika 1).
2. Slično, nacrtamo liniju prema perihelu Marsa, obraćajući pažnju na smjer u kojem nam je longituda perihela π definirana. Za naš datum (15.ožujka 1989.g.) longituda perihela Marsa koja je očitana iz astronomskog godišnjaka za 1989. godinu iznosi π =335,904° (slika 1).
3. Uzmimo kao mjeru 5cm = 1a.j.

Udaljenost od centra elipse do njenog fokusa je: $c = ea$ (e = ekscentricitet, a = velika poluos). Vrijednosti e i a pročitamo iz tablice elemenata, prilagodivši e i a mjeri za crtanje. Za naš odabrani datum 15.ožujka 1989. godine e i a dani su u tablici 1.

Također proračunamo malu poluos elipse b čija je vrijednost također dana u tablici 1. Osim toga, potrebno je ispitati je li prikaz elipse “ekscentričnom” kružnicom dovoljno precizan.



Slika 1. Longituda uzlaznog čvora Marsa W =49,477°. Longituda perihela Marsa p =335,904°.

Koristimo se razvojem u red

$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots |x| \leq 1$$

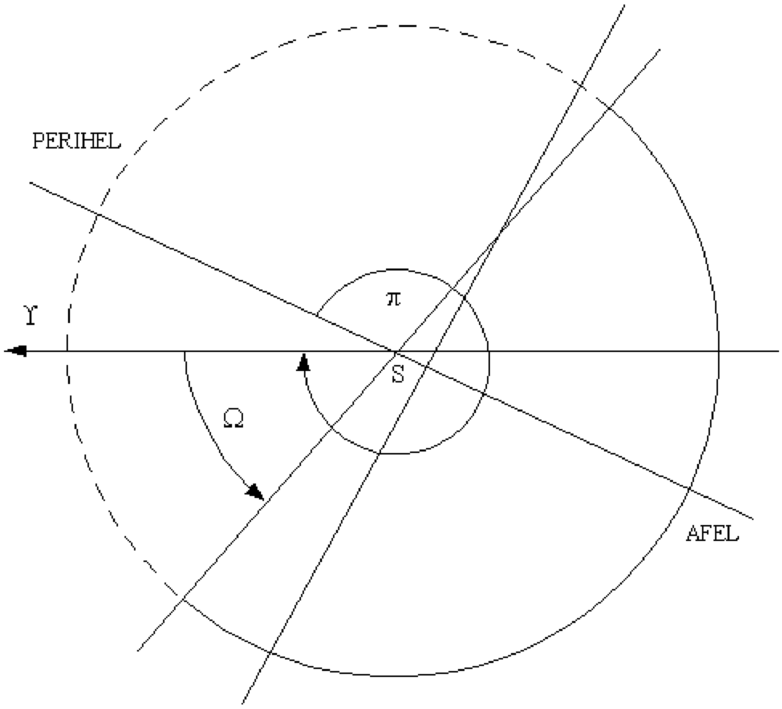
pa dobivamo:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \approx a\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)$$

Tablica 1

ELEMENTI MARSOVE STAZE						
Numerički ekscentricitet Marsove staze *e* (15. III 1989.g.)	velika poluos *a* Marsove staze ili srednja udaljenost (15. III 1989.g.)		linearni ekscentricitet dobiven iz izraza *c*=*e*·a		mala poluos Marsove staze *b* dobivena aproksimacijom koju koristimo za male veličine $b \approx a(1-(1/2)e^2)$	
	A (a.j.)	*a (cm)*	*c (a.j.)*	*c (cm)*	*b (a.j.)*	*b (cm)*
0,093402	*1,523746*	*7,61873*	*0,142321*	*0,711605*	*1,517099*	*7,585497*

4. Sada nacrtamo stazu Marsa. Dio koji je iznad ekliptike bit će predstavljen neprekidnom linijom, a preostali dio predstavljat će iscrtkana linija (slika 2).



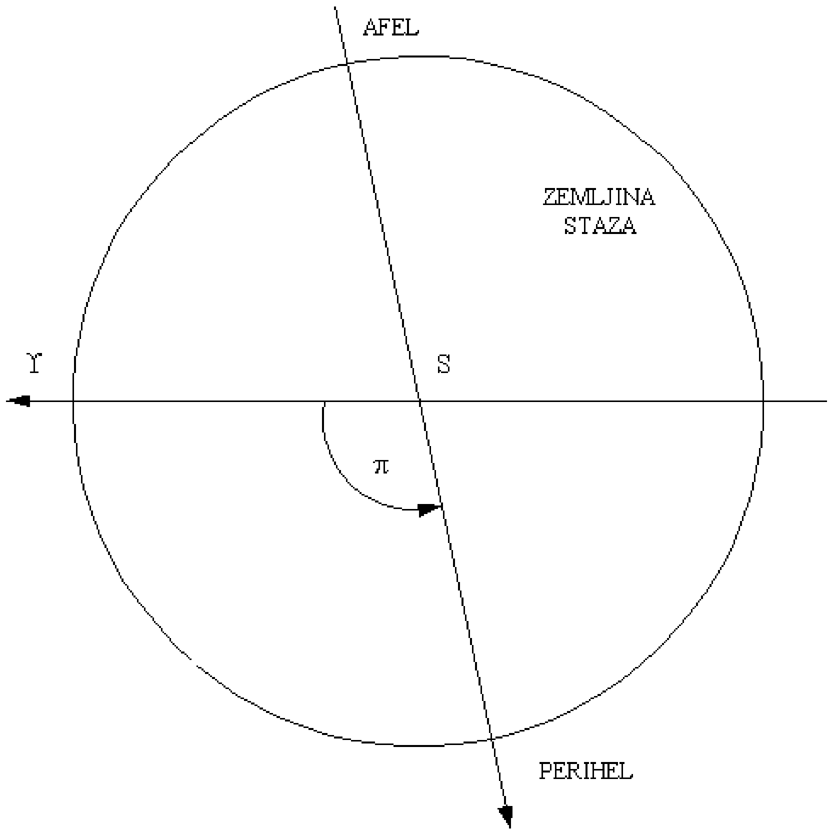
Slika 2. Staza Marsa (a=7,61873 cm; b=7,585497 cm; c=0,711605 cm; Ω=49,477°; π=335,904°)

5. Na isti način nacrtamo stazu Zemlje i Venere.

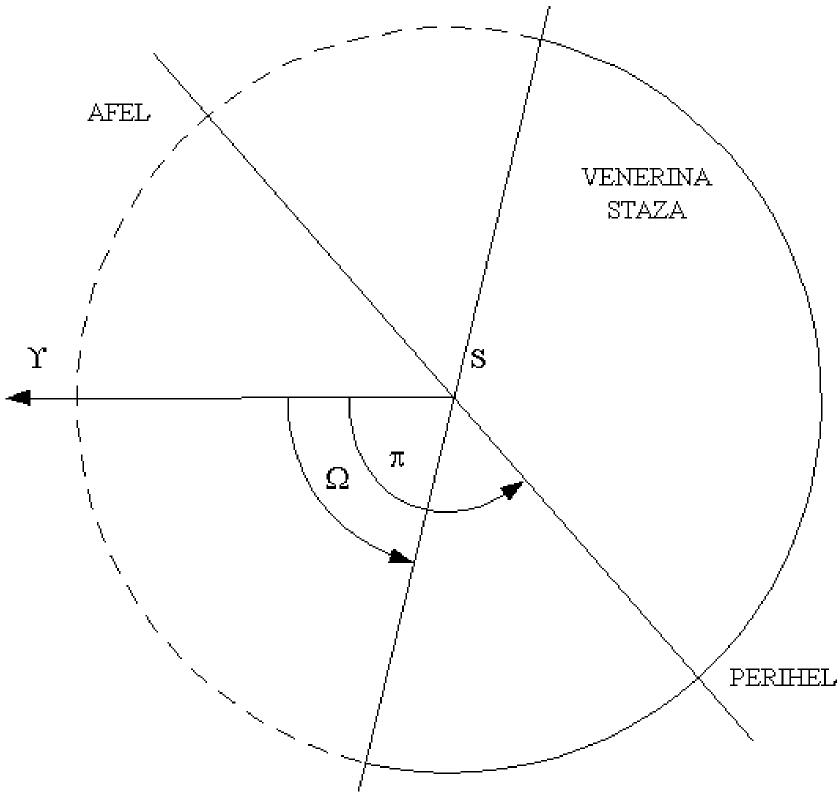
Analogno s točkom 3 zadatka, ono što smo radili za Mars, sada radimo za Zemlju i Veneru. Očitane i izračunate vrijednosti za elemente Zemljine i Venerine staze nalaze se u tablici 2. Staze Zemlje i Venere dane su na slici 3 i slici 4.

Tablica 2

ELEMENTI ZEMLJINE I VENERINE STAZE							
staza planeta	numerički ekscentricitet *e* (15. III 1989.g.)	velika poluos ili srednja udaljenost *a* od Sunca (15. III 1989.g.)		linearni ekscentricitet dobiven iz izraza $c=e \cdot a$		mala poluos *b* dobivena aproksimacijom za male veličine $b \approx a(1-(1/2)e^2)$	
		a/ a.j.	*a/ cm*	*c/ a.j.*	*c/ cm*	*b /a.j.*	*b/cm*
Zemlje	*0,016686*	*0,999981*	*4,999905*	*0,016686*	*0,083428*	*0,999842*	*4,999209*
Venere	*0,006795*	*0,723327*	*3,616635*	*0,004915*	*0,024575*	*0,723310*	*3,616552*



Slika 3. Staza Zemlje. Longituda perihela Zemlje π_Z = 102,655° .



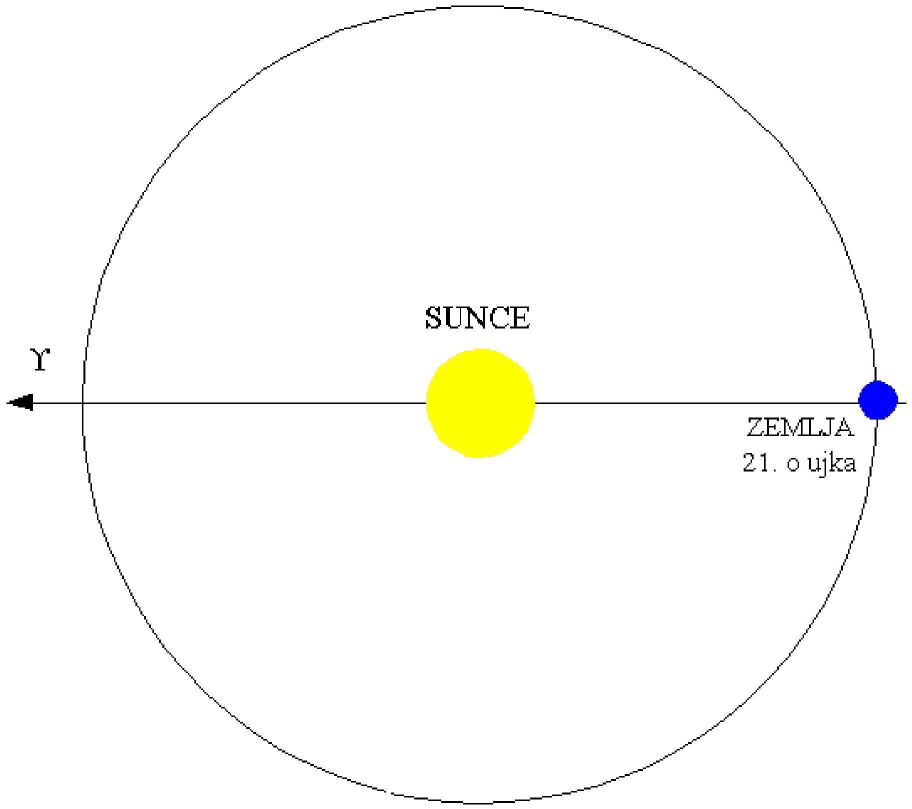
Slika 4. Staza Venere. Longituda perihela Venere π_V = 131,76°. Longituda uzlaznog čvora Venere Ω =76,584°.

6. Kolika je geocentrična longituda Sunca 21.ožujka?

Geocentrična longituda Sunca 21.ožujka iznosi $\lambda'_S=0°$ (slika 5).

Kolika je heliocentrična longituda Zemlje 21.ožujka?

Heliocentrična longituda Zemlje 21.ožujka iznosi $\lambda_z=180°$ (slika 3.3.5).



Slika 5. Uz računanje geocentrične longitude Sunca i heliocentrične longitude Zemlje 21. ožujka.

7. Položaj planeta u stazi određen je kutom perihel-Sunce-planet, nazvanom prava anomalija *n*, koja se neznatno razlikuje od srednje anomalije *M* (onu koju bi planet imao ako krećući iz perihela cijelo vrijeme ima istu kutnu brzinu). Poznavajući vrijeme najkasnijeg prolaza Marsa kroz njegov perihel, računamo njegovu srednju anomaliju na dan (koristimo tabelu Julijanskih dana).

Koristimo izraz:

$$n = M + (2e-(e^3/4))\sin M + (5e^2/4)\sin 2M + (13e^3/12)\sin 3M\ldots$$

U praksi vrijednost srednje anomalije *M* očitamo iz astronomskog godišnjaka kao: $M=L-\pi$ gdje je L srednja longituda, a p longituda perihela. U našem slučaju za 15. ožujka 1989.g., očitali smo da je: $L_{M(Marsa)}=88{,}2365°$; $L_{Z(Zemlje)}=172{,}5779°$; $p_{M(Marsa)}=335{,}904°$ i $\pi_{Z(Zemlje)}=102{,}638°$.

Za srednju anomaliju dobili smo slijedeće vrijednosti:

$$M_{M(Marsa)}=(-247{,}6675°) \text{ i } M_{Z(Zemlje)}=69{,}9399°$$

Sada iz gornjeg izraza nalazimo sljedeće vrijednosti za pravu anomaliju Marsa i pravu anomaliju Zemlje:

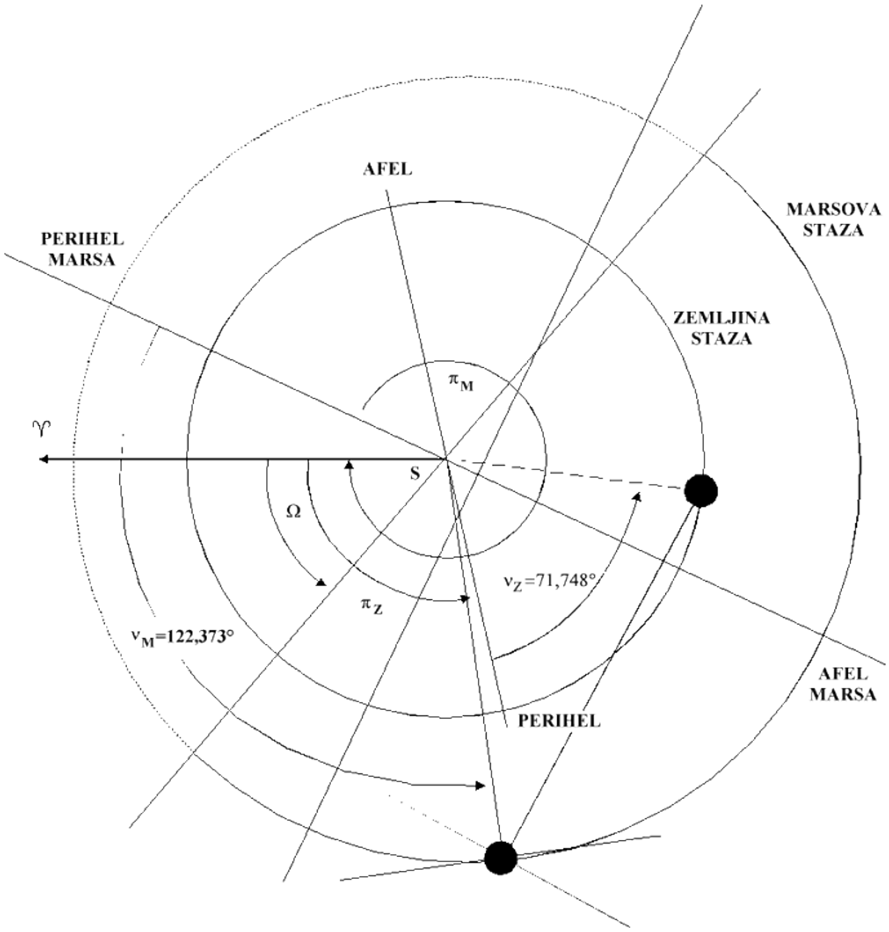
$$\nu_{M(Marsa)}=121,763°$$
$$\nu_{Z(Zemlje)}=71,7486°$$

Dobivenu vrijednost za ν_M ucrtamo na slici 6, te od točke *S* (Sunce) povučemo radijus-vektor do planetske staze i time je određen položaj Marsa.

Kolika je njegova heliocentrična longituda?

Heliocentričnu longitudu Marsa dobijemo iz sljedećih vrijednosti kao: $\lambda_{M(Marsa)}= \nu_{M(Marsa)}-(360° - \pi_{M(Marsa)})$ što možemo uočiti i sa slike 6.

Heliocentrična longituda Marsa $\lambda_{M(Marsa)}$=97,667°.



Slika 6. Marsova staza (a=7,61873 cm; b=7,585497 cm; c=0,711605 cm; Ω =49,477°; π =335,904°; ν =121,763°) Zemljina staza (a=4,999905 cm;b=4,999209 cm; c=0,083428 cm; π =102,655°; ν =71,7486°)

8. Gdje se nalazi Zemlja tog istog dana (15. ožujka 1989.g.)?

Da bi odgovorili na ovo pitanje koristimo vrijednost koju smo dobili pod točkom 7. zadatka da prava anomalija Zemlje iznosi: ν_Z=71,7486° i time je položaj Zemlje određen. Osim toga, moramo naći heliocentričnu longitudu Zemlje 15. ožujka 1989.g. Zato, uočimo sa slike 6 da Zemljinu heliocentričnu longitudu dobivamo iz sljedećeg izraza:

$$\lambda_{Z(Zemlje)} = v_{Z(Zemlje)} + \pi_{Z(zemlje)} \text{ tj. } \lambda_{Z(Zemlje)} = 174{,}3866°.$$

9. U ovoj točki zadatka moramo na svom crtežu tj. slici 6 izmjeriti geocentričnu longitudu Marsa i na zvjezdanoj karti naći zviježđe gdje će Mars biti opažen.

Mjerenjem sa slike 6 dobivamo da je geocentrična longituda Marsa 15. ožujka 1989.g: $\lambda'_{M(Marsa)} = 61°$, pa očitavanjem sa zvjezdane karte dobivamo da će Mars tada biti opažen u zviježđu Zmijonosca.

10. Heliocentrična latituda aproksimativno je dana s: $\beta = i\sin(\lambda - \Omega)$. Geocentrična latituda nađena je iz razmatranja da je planet na udaljenosti r od Sunca smješten na visinu $\square r$ iznad (ili ispod) ekliptičke ravnine. Ako je A udaljenost od Zemlje do planeta, geocentrična latituda bit će:

$$\beta' = \beta(r/A).$$

U ovom dijelu zadatka moramo izmjeriti r/A na svome crtežu i izračunati geocentričnu latitudu Marsa. Iz gornjih izraza imamo:

$$\beta' = \beta(r/A) = (i\sin(\lambda - \Omega))(r/A).$$

Mjerenjem, s našeg crteža (slika 6) dobivamo (za datum 15. ožujka 1989.g.) da je r=7,9 cm i A=8,4 cm. Nakon toga, iz astronomskog godišnjaka očitamo inklinaciju Marsove staze i=1,8497° i longitudu uzlaznog čvora Marsa Ω=49,477° (za 15. ožujka 1989.g.), te iskoristimo rezultat koji smo dobili za heliocentričnu longitudu Marsa pod točkom 7. našeg zadatka λ_M=97,667°.

Iz tih vrijednosti pomoću gornjeg izraza dobivamo da geocentrična latituda Marsa iznosi:

$$\beta'_{M(Marsa)} = 1{,}8497° \sin(97{,}667° - 49{,}477°) \cdot (7{,}9/8{,}4) = 1{,}296627°$$

11. U ovoj točki zadatka moramo odrediti kut između linije doglednice i granične ravnine između svjetla i tame na Marsu (ravnina terminatora). Nakon toga moramo nacrtati disk planeta kao što smo ga vidjeli 15. ožujka 1989.godine.

Da bi to riješili prisjetimo se definicije faze planeta Sunčevog sustava (vidi poglavlje 5).

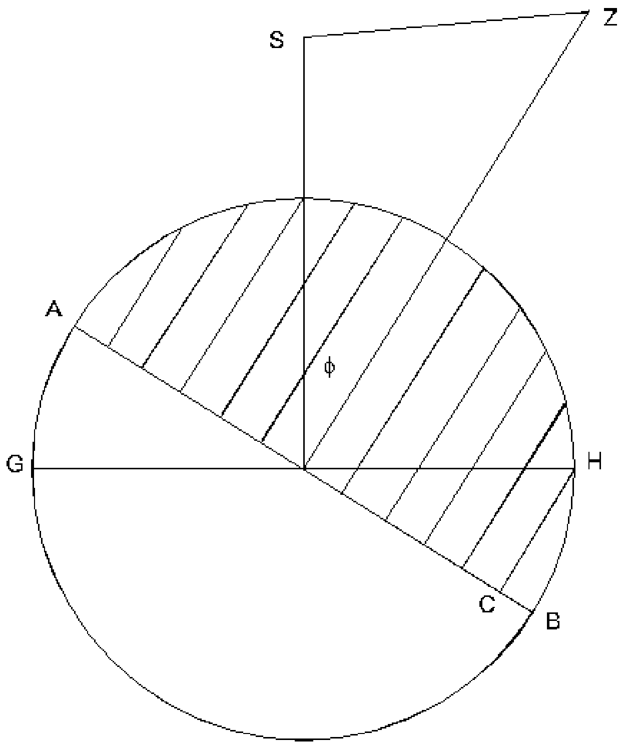
Najprije izmjerimo fazni kut Φ, tj. kut pod kojim bi se s planeta vidjela udaljenost Zemlja-Sunce. Iz naše slike 6 izmjerili smo fazni kut Marsa (Φ_M) koji za datum 15. ožujka 1989. godine iznosi 35°. Uočimo da je taj kut jednak kutu koji zatvaraju ravnina koja dijeli obasjanu polutku Marsa od one polutke koja je u tami i ravnina koja je okomita na doglednicu. Zatim iz vrijednosti koju smo izmjerili za F_M nađemo fazu koja po definiciji predstavlja omjer između osvijetljenog dijametra vidljivog diska nebeskog tijela i ukupnog dijametra. Izraz za fazu je sljedeći:

$$faza = \frac{AC}{AB} = \frac{R + PC}{2R} = \frac{R + R\cos\Phi}{2R} = \frac{1 + \cos\Phi}{2}$$

U našem slučaju dobivamo: $faza = (AC/AB) = (1+\cos 35°)/2 = 0{,}909576$. Budući da ekvatorski polumjer Marsa iznosi R=3393,4 km dobivamo da je $AB = 2R$=6786,8 km. Vrijednost AC dobivena iz izraza za fazu iznosi: AC=6173,11 km.

Da bi dobili vrijednost PC, oduzmemo od vrijednosti AC vrijednost ekvatorskog polumjera R i dobivamo da je: PC= 2779,71 km.

Stavimo li da je za crtanje R=4 cm, proračunamo (3393,4 km:2779,71 km=4cm:$x$cm Ţx=3,277 cm) da je za crtanje vrijednost PC =3,28 cm. Sada možemo nacrtati disk Marsa kakvog smo vidjeli 15. ožujka 1989. godine (slika 7). Na slici 7 uočavamo da je traženi kut tj. kut između linije doglednice i ravnine terminatora jednak: 90° -Φ=90° -35° =55°.



Slika 7

12. Kada je Mars u opoziciji, relativno je mala njegova udaljenost od Zemlje. Pod ovom točkom zadatka moramo naći u kojem će se dijelu godine dogoditi sljedeća opozicija (iza datuma 15. ožujka 1989.g.)? Osim toga moramo naći u kojem će zviježđu Mars tada biti?

Sada, da bi riješili naš problem koristimo vrijednosti dobivene pod točkom 7. zadatka za prave anomalije ν_M=121,763° ; ν_Z=71,7486°, heliocentričnu longitudu Marsa λ_M = 97,667°, te vrijednost longitude perihela Zemlje za datum 15. ožujka 1989.g. očitanu iz astronomskog godišnjaka za 1989. godinu koja iznosi π_Z=102,655°. Iz toga (slika 8) dobivamo kut a (heliocentrični kut između Marsa i Zemlje) kao:

$$\alpha = \pi_Z - \lambda_M + \nu_Z = 102{,}655° - 97{,}667° + 71{,}7486°$$
$$\alpha = 76{,}7366°$$

Sa slike 8 uočavamo da je kut b jednak 360°-α tj. b =283,2634°. Osim toga, vidimo da je 15. ožujka 1989. godine Zemlja ispred Marsa, pa da bi došlo do opozicije ona ga “lovi” tj. smanjuje kut b, a Mars ga povećava. Da bi saznali koliko još dana treba proći od 15. ožujka 1989. godine do prve sljedeće opozicije treba vrijediti:

$$\beta + \left[\frac{-360°}{T_Z} + \frac{360°}{T_M}\right] \cdot d = 0$$

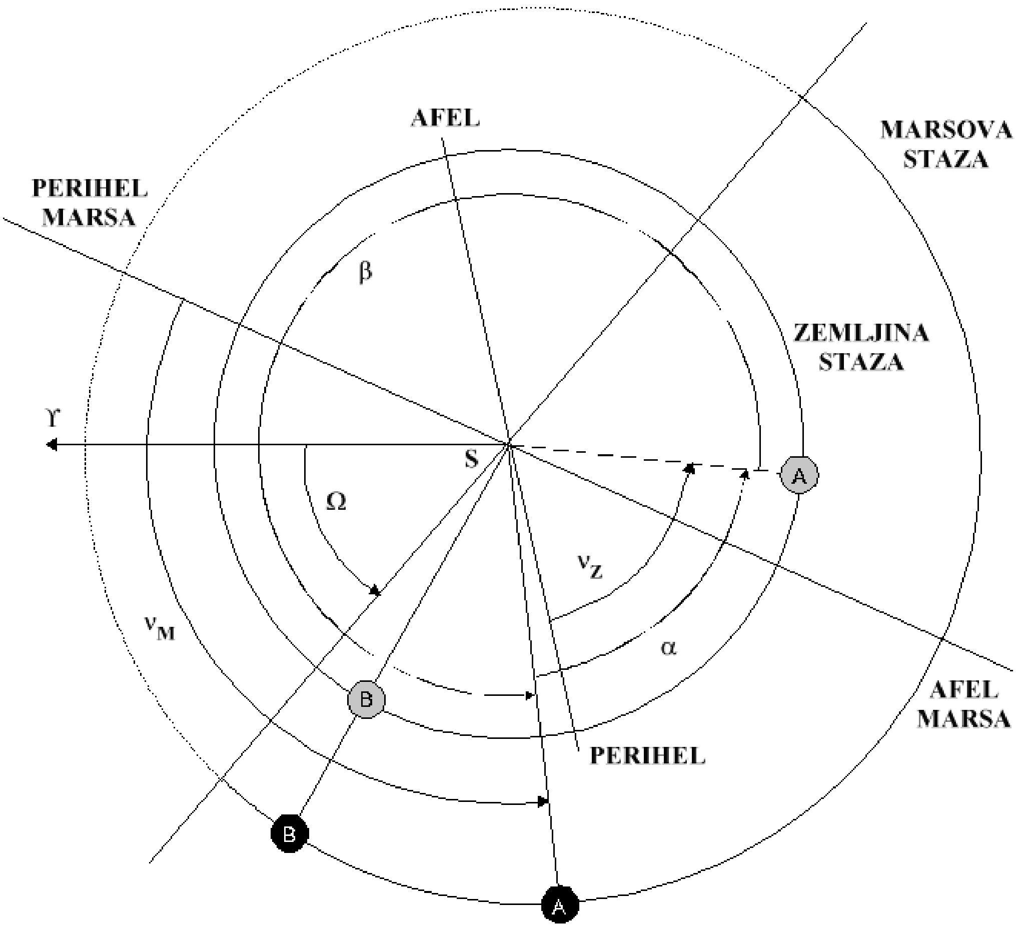
d = broj dana od 15. ožujka 1989. godine do prve sljedeće opozicije;

T_Z = 365,2536 dana;
T_M = 687 dana;

Pomoću ovih vrijednosti iz gornjeg izraza nalazimo da je *d* (broj dana do opozicije) približno jednak 613,66 dana iz čega dobivamo da se opozicija zbila na datum 19. studenog 1990.g. Zemlja će u tom vremenu opisati kut približno od 604,83°, a Mars kut od 321,57°. Zaključujemo da će Zemlja učiniti puni krug i još 244,83° od položaja 15. ožujka 1989.g. ($\lambda_{Z(A)}$=174,3866 °- heliocentrična longituda Zemlje u položaju A na slici 8) do položaja opozicije 19. studenog 1990.g. ($\lambda_{Z(B)}$=59,2°- heliocentrična longituda Zemlje u položaju B na slici 8). Mars će učiniti još 321,57° od položaja 15. ožujka 1989.g. ($\lambda_{M(A)}$=97,667°- heliocentrična longituda Marsa u položaju A na slici 8) do položaja opozicije 19. studenog 1990.g. ($\lambda_{M(B)}$=59,23°- heliocentrična longituda Marsa u položaju B na slici 8).

Uočili smo da je u vrijeme opozicije 19. studenog 1990.g. heliocentrična longituda Zemlje i Marsa jednaka i iznosi $\lambda_Z \approx \lambda_M$=59,23°. Osim toga, sa slike 8 uočavamo da je 19. studenog 1990.g. $\lambda_Z \approx \lambda_M = \lambda'_M$ gdje je λ'_M geocentrična longituda Marsa, pa sa zvjezdane karte očitamo da se Mars u vrijeme opozicije nalazi u zviježđu Jarca.

Iz gornjih vrijednosti možemo saznati kada se zbila prethodna opozicija. Zbog toga, koristimo vrijednost da srednji sinodički period Marsa iznosi S_{sr}=779,98 dana te dobivamo da se prethodna opozicija zbila približno 166,32 dana prije 15. ožujka 1989. godine, odnosno 29. rujna 1988. godine.



Slika 8

Položaj A – Zemlja i Mars 15. ožujka 1989.g.($\lambda_{Z(A)}$=174.3866°, $\lambda_{M(A)}$=97,667°)
Položaj B – Zemlja i Mars 19. studenog 1990.g. u vrijeme opozicije. ($\lambda_{Z(B)} \approx \lambda_{M(B)}$=59,23°)